



TITLE:

球面大気におけるロスビー波伝播 の非線形効果(波動の非線形現象の 数理とその応用)

AUTHOR(S):

三村, 和男

CITATION:

三村, 和男. 球面大気におけるロスビー波伝播の非線形効果(波動の非線形現象の数理とその応用). 数理解析研究所講究録 1997, 993: 242-251

ISSUE DATE:

1997-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/61168>

RIGHT:

球面大気におけるロスビー波伝播の非線形効果

東海大学・教養学部 三村 和男 (Kazuo Mimura)

§ 1 はじめに

北半球の冬季成層圏においてしばしば見られる成層圏突然昇温現象とは、温度の突然上昇のみならず、北極を取り巻く冬型の西風極渦が夏型の東風極渦に突然反転するという現象を伴っている。そして、現在理解されている基本的なシナリオは以下の通りである。

- (1) 対流圏において、ブロッキング等により強い定常ロスビー波動が発生する。
- (2) この波動が「波束」として西風極渦中を鉛直伝播するとき、その振幅が増大する。
- (3) 波束の先端部では、波動－平均流相互作用の一般論に従い、西風極渦の減速が引き起こされる。
- (4) このとき同時に、コリオリ力の作用により、極向きの平均子午面循環が生成され、この流れが極上空で下降流と上昇流をつくる。
- (5) 下降流は断熱圧縮により成層圏の昇温をもたらす、上昇流は断熱膨張により中間圏の降温をもたらす。

このように、この現象は基本的には、「熱的にではなく、力学的に」、駆動されている。従ってこれは「成層圏突然極渦反転」と呼んでも悪くない現象である。ところで、波動の振幅が大きいときには、典型的な「波動－平均流相互作用」理論の前提になっている「局所平面波近似」が成り立つとは限らない、このような強い非線形相互作用のもとでは、「どんな経過で」、「どのような範囲で」、「どれだけの強さの」極渦反転が起こるのであろうか。この疑問に答えるために、上記のシナリオをさらに単純化し、球面大気におけるロスビー波動の非線形効果のみに焦点を当てたバロトロピック・モデルを考えた。そこでは、ロスビー波動は、対流圏から鉛直伝播する変わりに低緯度帯から水平伝播する。

このような問題設定に対応した室内実験で容易に極渦反転を再現できたことは、既に報告した(数理解析研講究録 866, 908)。今回は、地球大気を、回転する同心二重球殻の間に等密度流体を満たしたものと等価であると見なし、数値実験によって、この極渦反転の再現を行った。

§ 2 球面バロトロピック・モデル

初期状態として、冬型極渦を表現するべく、角速度 Ω で自転する地球上で、そ

の自転軸を中心に角速度 $\Delta\Omega$ で剛体的に回転する西風極渦を設定する。そして、地球に固定された渦度強制項の大きさをパルスの的に変化させて、ロスビー波動を励起し、その後の速度場の時間発展を調査する。

地球半径を a 、長さ、速さ、時間、流線関数の代表的スケールを各々、 a , $a\Delta\Omega$, $1/\Delta\Omega$, $a^2\Delta\Omega$ として、球面バロトロピック渦度方程式を無次元化すると次式となる。すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi + J(\psi, \nabla^2\psi) + \frac{1}{R_o}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = \frac{1}{R_o}F(\lambda, \phi, t), \quad (1)$$

ただし、 R_o はロスビー数であり、ここでは $R_o = \Delta\Omega / (2\Omega)$ と定義されている、そして、 ψ は流線関数、 $\nabla^2\psi$ は渦度であり、 t , ϕ , λ は時間、余緯度、経度である。また、渦度強制項は、東西波数 n で、緯度方向には赤道上にピーク値を持ち赤道から南北両極間の緯度差の $1/10$ 離れると、赤道での $1/e$ になるガウス分布型で、その振幅が $t=2$ において最大値 ($10A/\sqrt{\pi}$) をとるパルスのであるとして、次式のように定義した。

$$F(\lambda, \phi, t) \equiv f(t)g(\phi)\sin(n\lambda), \quad (2)$$

$$f(t) \equiv A \operatorname{sech}^2(t-2), \quad (3)$$

$$g(\phi) \equiv \frac{10}{\sqrt{\pi}} \exp(-10^2(\frac{\phi}{\pi} - \frac{1}{2})^2), \quad (4)$$

ただし、 A は渦度強制の強さの目安である。このモデルでは、時間を $1/\Delta\Omega$ で無次元化してあるので、初期極渦の角速度は常に 1 と表され、無次元パラメータは R_o , A , n のみである。 R_o が小さいときは、ベータ効果や渦度強制がより強められる事になっている。数値実験を実行するときには、変換法を伴うスペクトル法を使った、ただし計算を安定化させるため微小な粘性を入れてある。

数値実験を行う前に、波動伝播特性を調べて、このモデルの線形的な振る舞いについて予想を立てておこう。初期の剛体回転的西風極渦に、角振動数 ω , 東西波数 n , の微小波動擾乱が加わったとして、1式の右辺を 0 とした式に $\psi = -\cos\phi + \psi'$, $\psi' = \sin^{-1/2}(\phi)\chi(\phi)\exp(i(\omega t - n\lambda))$ を代入して線形化すると、波動方程式および局所分散関係式が得られる、すなわち、

$$\frac{d^2\chi}{d\phi^2} + m^2\chi = 0, \quad (5)$$

$$m^2 \equiv \frac{1 + \sin^2\phi - 4n^2}{4\sin^2\phi} + \frac{n}{n - \omega}(\frac{1}{R_o} + 2), \quad (6)$$

この局所分散関係式から、南北両半球で反射緯度を持ち、それより低緯度側でのみ南北方向に波束として群速度で伝播することが可能である事がわかる。いくつかの典型的 n と R_o の値について、反射緯度 (Highest Latitude), 赤道から反射緯度を経て再び赤道に戻ってくるまでの所用時間 (Round trip period), 高緯度帯の面

積が赤道帯に比べて狭い事による波動振幅の増幅効果 (Amplitude Ratio), 赤道から反射緯度まで伝播する際の位相のずれ (Phase Difference) を表 1 に示した。Ro が小さいほど、

また n が小さいほど、より高緯度まで、より時間をかけて伝播し、反射緯度においては、振幅がより増大し、位相のずれもより大きくなる事がわかる。

Rosbby Number	Highest latitude	round trip period (day)	Amplitude ratio	Phase difference (deg.)
$Ro=1/40$	81.1	10.2 (32.4)	2.74	-1013
$Ro=1/20$	77.7	7.36 (11.7)	2.33	-693
$Ro=1/10$	73.2	5.43 (4.32)	2.01	-474

Table 1: the case of $n = 1$

Rosbby Number	Highest latitude	round trip period (day)	Amplitude ratio	Phase difference (deg.)
$Ro=1/40$	72.0	5.08 (16.2)	1.83	-411
$Ro=1/20$	64.8	3.68 (5.85)	1.56	-250
$Ro=1/10$	54.7	2.71 (2.16)	1.54	-141

Table 2: the case of $n = 2$

Rosbby Number	Highest latitude	round trip period (day)	Amplitude ratio	Phase difference (deg.)
$Ro=1/40$	62.4	3.39 (10.8)	1.48	-212
$Ro=1/20$	50.2	2.45 (3.89)	1.26	-105
$Ro=1/10$	30.0	1.81 (1.44)	1.09	-32

Table 3: the case of $n = 3$

表 1: 定常ロスビー波束の伝播特性

Round trip period の括弧の中の数値は単位を日に直したもの、Phase difference の負号は反射緯度における位相が赤道上に比べて西にずれている事を示す。

§ 3 小振幅の場合

まず、渦度強制項の振幅 A を 0.1 として数値実験を行った。その結果は、励起されたロスビー波の振幅が小さいため、流線関数の場合でも渦度の場合でも、ほとんど変化はみられない。そこで、初期状態からのずれに注目して、小振幅の場合のロスビー波動の振る舞いの特徴を調べよう。

図 1 は、 $n=2$, $Ro=1/20$, $A=0.1$ の場合の、初期状態を差し引いた渦度場の時間発展を示している。 $t=1$ のころから赤道を中心とした渦度場が生成されはじめ、 $t=2, 3$ においては、群速度が南北両極向きの強い定常ロスビー波伝播のパターン (高緯度ほど位相が西へ傾く) を示している。 $t=5$ において、緯度 60° 付近で渦度の最大・最小値が見られ、その後、位相の傾きは赤道向きの群速度に対応した (低緯度ほど位相が西へ傾く) パターンが見られ、 $t=7$ では、再び赤道上で強い渦度が認められる。その後、再び高緯度向き伝播パターンと $t=10$ における緯度 60° 付近で渦度の集中が見られる。強調すべき事は、位相の傾きが極向き伝播型から赤道向き伝播型に変わるとき、反射緯度付近における位相は変化せず、より低緯度帯における等位相線が大きく西にシフトする事である。

図 2 は、図 1 の数値実験時における、東西平均した角運動量の時間変化率 (Acceleration) と角運動量フラックスの収束項 (Convergence) の緯度・時間分布である。両パターンはよく一致し、粘性の効果は無視できるほど小さい事を示している。そして、極向き伝播時 ($1 < t < 5$) の高緯度での減速と低緯度での加速という傾向がみられる。また、赤道向き伝播時 ($5 < t < 8$) では、逆に高緯度での加速と低緯度での減速が特徴である。

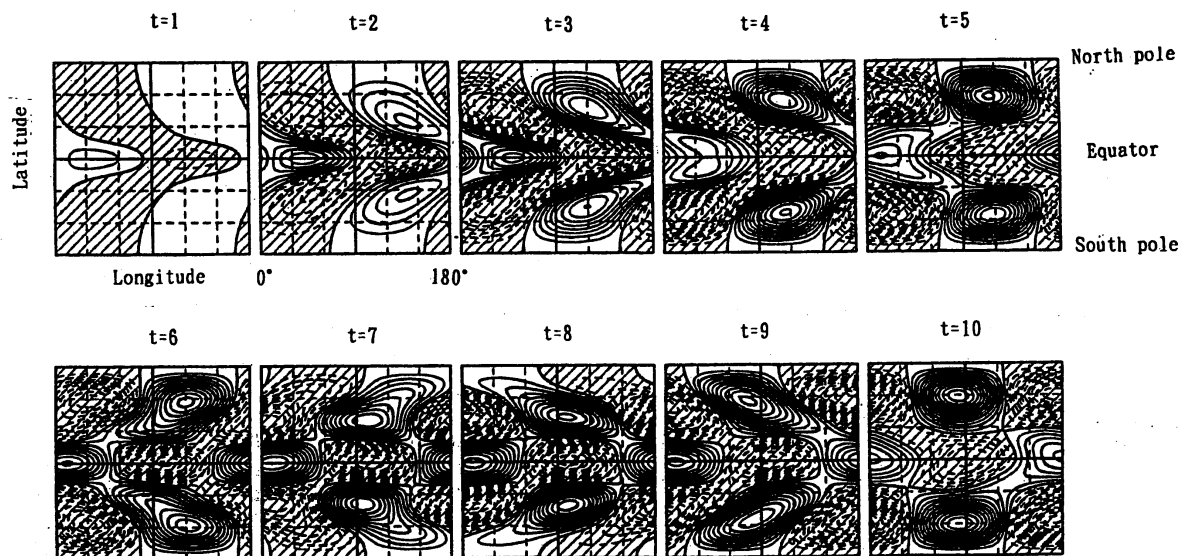


図1: 渦度場の時間発展

$Ro=1/20$, $A=0.1$ の場合の渦度場の変化を見易くするため、初期の極渦に伴う渦度場を差し引いた渦度場の時間発展をコンター・マップで示している。渦度場は経度差 180° で周期的であるため、 0° から 180° の領域のみを示した。影の部分は負の渦度を表す。

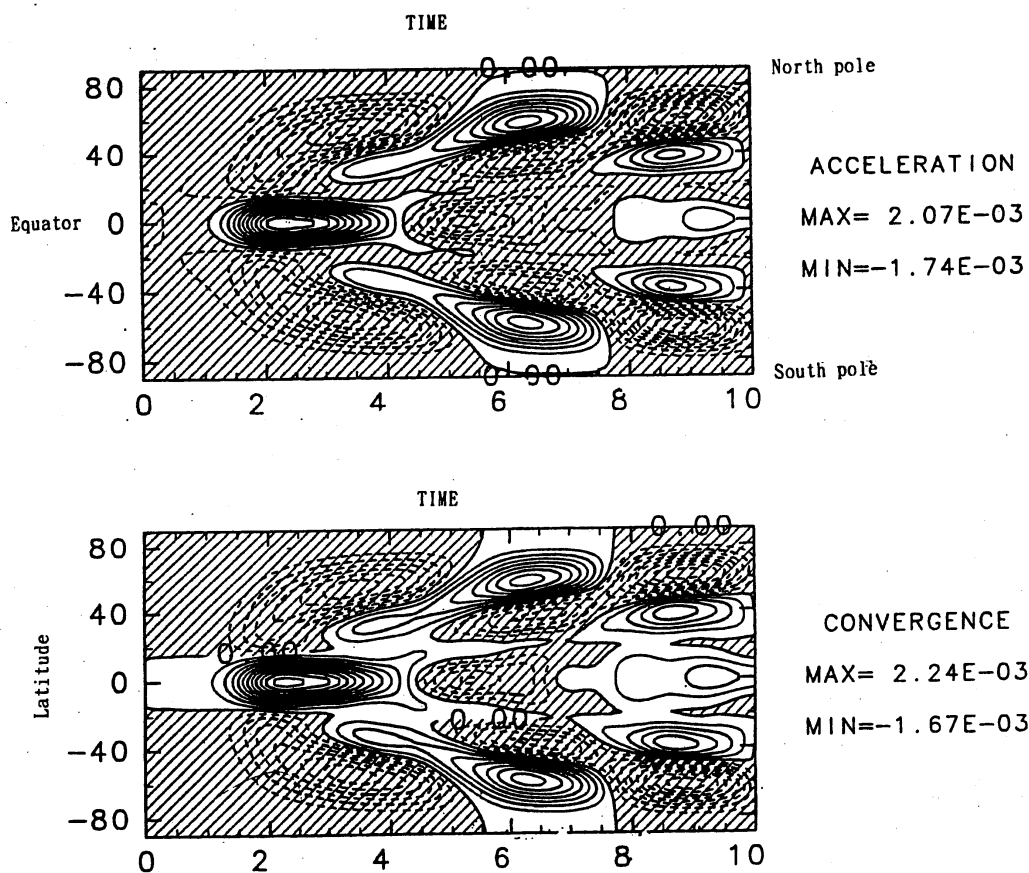


図2: 角運動量收支

$Ro=1/20$, $A=0.1$ の場合について、上段は経度方向に平均された角運動量の緯度別時間変化率の時系列、下段は同じく緯度別の平均角運動量フラックスの収束の時系列をコンター・マップで示す。影の部分は負の値を表す。

§ 4 波束モデル

漸節に述べた小振幅の場合の時間発展の特徴を把握するために、ふたつの線形定常ロスビー波束解を人為的に重ね合わせて、上記の数値実験の結果を再現する事を試みた。

図3のパターンA, B, Cは、式5, 6の流線関数の局所平面波近似解のうち、各々、北向き伝播解、北半球の反射緯度において位相を固定して南向きに反射した解、その波束が南半球での反射緯度において位相を固定して北向きに再反射した解、の全球パターンを示す。反射緯度間では内部波型、それらより高緯度側では外部波型となっている。そして、 $0 < t < 4$ においては、パターンAとBをその混合比を、次第に1:0から0:1に変化させながら重ね合わせ、さらに図3D上半のように赤道から始まって北の反射緯度までを往復するガウス分布型包絡線関数を掛け合わせる。引き続く $4 < t < 8$ においては、パターンBとCを同様に混合比を1:0から0:1に変化させながら重ね合わせた上に図3D下半のように赤道から始まって南の反射緯度までを往復する包絡線関数を掛け合わせる。これで、赤道で励起されて、北向きに伝播し始める定常ロスビー波束という概念を表現した人為的な時間発展場が構成される。最後に、これと全く南北対象な解を重ね合わせると、赤道で励起されて、北向きおよび南に各々伝播し始めるふたつの定常ロスビー波束の人為的な時間発展場が構成される。

図4は、こうやって得られた流線関数場の時系列であり、 $t=0, 1$ の極向き伝播、 $t=2$ の高緯度に集中した定在波パターン、 $t=3$ の赤道向き反射パターン、 $t=4$ での赤道上に集中した定在波パターン、 $t=5, 6, 7, 8$ の、各々、再極向き伝播、再極集中、再赤道向き伝播、再赤道集中のパターンを認める事ができる。このパターンは図1の基本的特徴と一致し（図1は渦度、図2は流線関数ではあるが）、図1の小振幅の場合の時間発展を次のように解釈できる。

すなわち、北向き及び南向きのふたつの定常ロスビー波束が赤道から、反射緯度まで伝播し、そこで一旦反射緯度に渦度の集中した定在波型パターン（位相が南北に立つ）を経て、赤道に戻り、そこでふたつの波束が合成され今度は赤道上に渦度の集中した定在波型のパターンをつくり、その後、各々の波束は反対側の半球への伝播を続ける結果、見かけ上赤道で反射しているように見える。

表1の線形伝播特性と比べると、いずれの値もやや小さいめではあるが、様々な Ro や n の値での数値実験の結果を見ても（図は省略）、定性的には上記の波束伝播のイメージと一致するものが得られた。

図5は、この人為的時系列をもとに、経度平均角運動量の収束の変動を描いたものである。図5の $0 < t < 6$ の様子は、図2bの $2 < t < 10$ までの変動パターンとよく似ている事がわかる。

すなわち、小振幅の場合の時間発展の特徴は、まさに、南北伝播するロスビー波束の「先端部での減速と後端部での加速」という、典型的な「波動-平均流相互作用」のシナリオと矛盾する事がない。しかしながら、このシナリオでは、時刻 $t=2$ における最初の反射以降は、ふたつの波束が反射緯度から、他半球での反射緯度

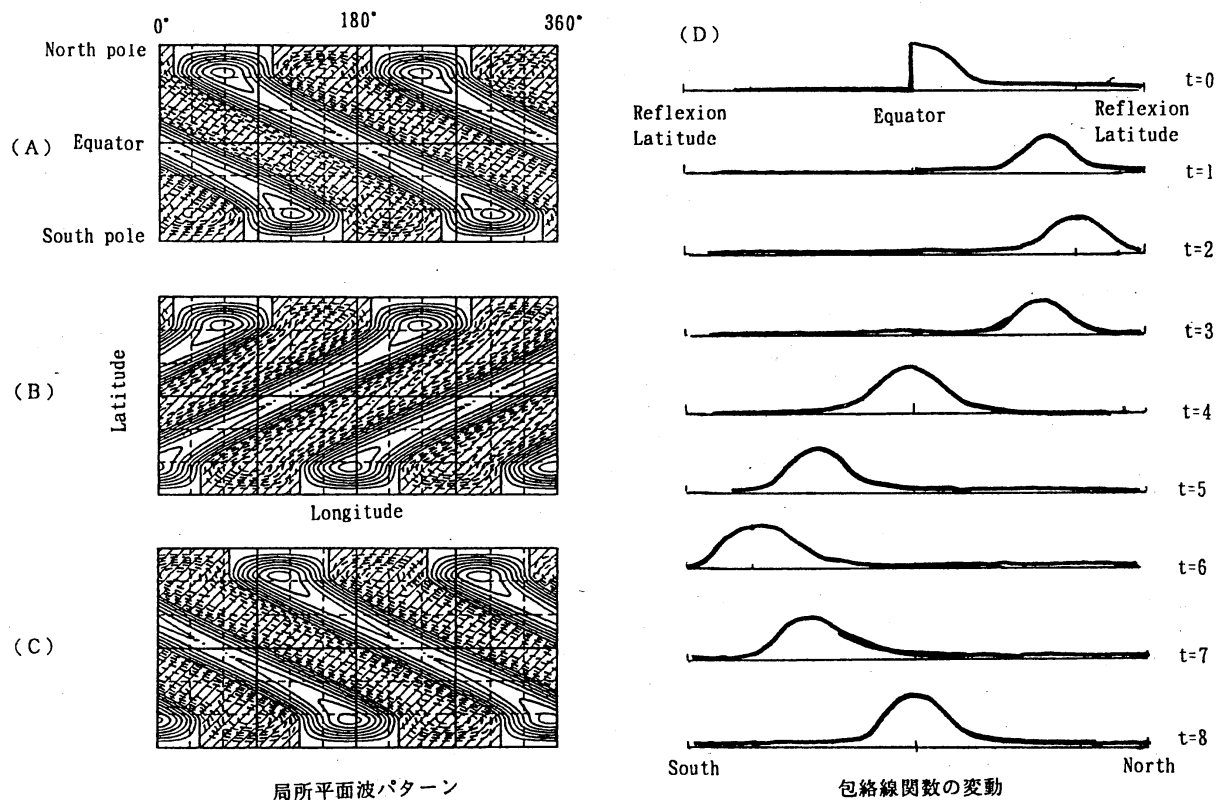


図3： 波束モデルの構成

波束モデルを構成するための手順を示す。図左は、 $Ro=1/20$, $A=0.1$ の場合における、流線関数の局所平面波解を示す。(A)と(C)は群速度が北向きである解、(B)は南向きの解であり、(A)と(B)では、北半球の反射緯度で位相が一致している事、(B)(C)では南半球の反射緯度で位相が一致している事に注意。(D)は包絡線関数が群速度で伝播する様子を表現している。ただしここでは、南北の反射緯度間を往復する時間が8であるとし、かつ包絡線のピークは完全に反射緯度まで到達するのではなく、その7割の緯度まで伝播できるとした。

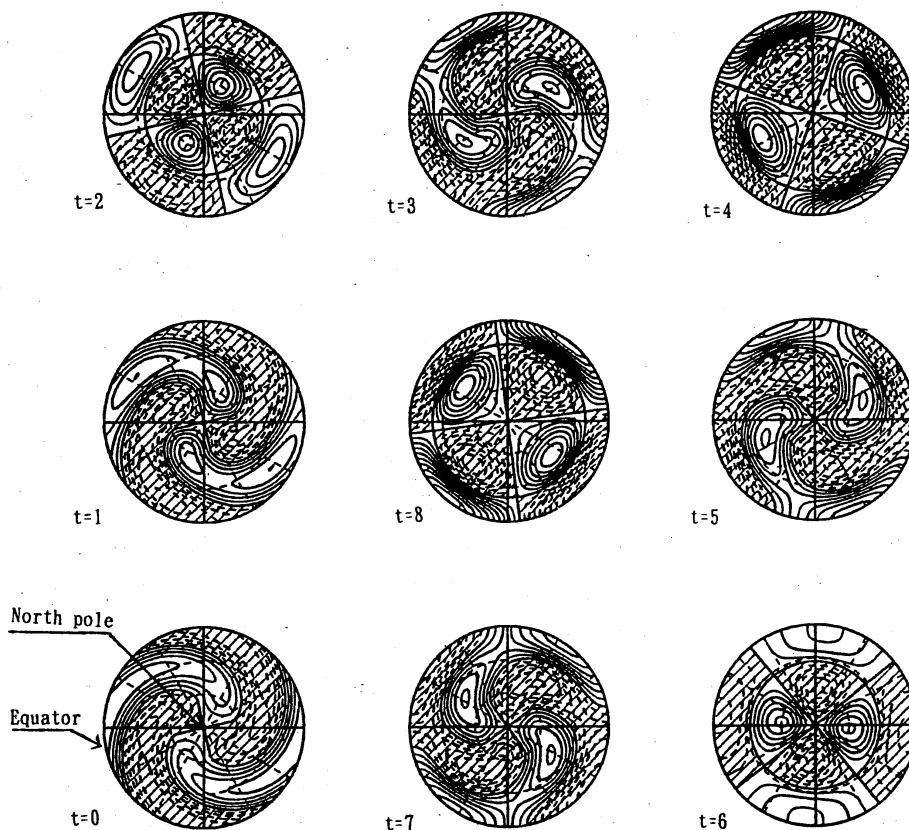


図4： 波束モデルによる流線関数

$Ro=1/20$, $A=0.1$ の場合に対応した波束モデルによる人為的な流線関数場の時間変化を示している、ただし初期極渦の場を差し引いたものである。

に到達するまでの間に、任意の緯度において、加速・減速の効果は完全に相殺される事を繰り返すのみである。従って、最初の極向き伝播時に引き起こされた加速・減速のみが、実質的にロスビー波が平均流に与える効果と言える。

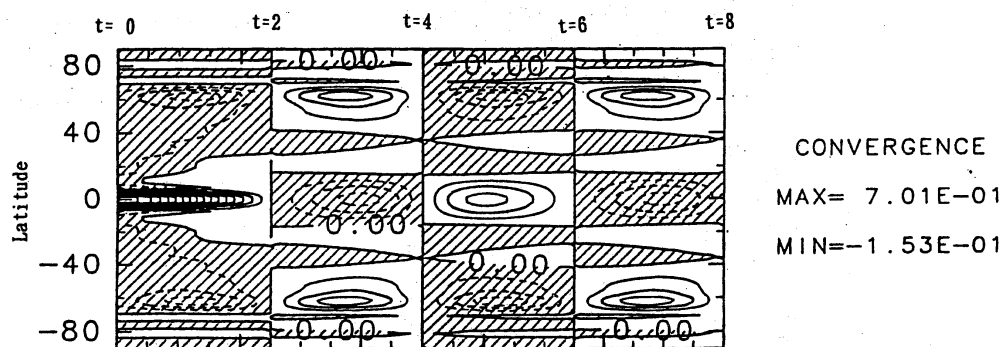


図5： 波束モデルによる角運動量収束
 $Ro=1/20$, $A=0.1$ の場合に対応した波束モデルによる、人為的な平均角運動量フラックスの収束の時系列をコンター・マップで示す。影の部分は負の値を表す。

§ 5 大振幅の場合

図6 aは、渦度強制項の振幅が大きい場合 ($A=3$) の北半球における流線関数場の時間発展のスナップ・ショットである。 $t=2$ において、北極を中心とした逆S字型の等位相線が認められ、強い定常ロスビー波束の極向き伝播を示している。 $t=3$ においては、小振幅の場合と同様に高緯度帯に東西波数2のパターンの渦度分布が見られるが、今度は、負の渦度（時計回り流速）を持つ閉じた流線が形作る孤立したふたつの目玉が、生の流線関数場でも十分目立つほど強い。そして、 $t=4$ では、先のふたつの目玉が合体し、小振幅の場合に高緯度集中型定在波を形造っていた $t=5$ では、北極を中心とするひとつの大きな時計回り（東風）の極渦を形成した。そして、中緯度帯を中心に波数2の定在波パターンが認められる。この時刻以後は、全体としてほとんどパターンを変える事なく、その位相がほぼ一定の速さで西へ西へと伝播し続けている。すなわち、低緯度帯から伝播してきた定常ロスビー波束が西風極渦の反転を引き起こした、そして、低緯度帯では全角運動量を補償するように強い西風が残った。

流図6 aは、同じ条件下での渦位 (Potential Vorticity) の時間発展のスナップ・ショットである。支配方程式 (式1) は渦度強制項を除けば、流体粒子の運動に伴う渦位変化が無いという式でもあるため、低緯度帯を除けば、この図は、初期に同じ緯度円上に存在していた流体粒子群の移動を表現していると見なせる。この図でハッチの付いた部分は、初期に北緯 65° 以北に存在していた粒子群を示しており、 $t=2, 3, 4, 5$ の過程で、引き延ばされ、逆S字型に折り畳まれた後、ふたつの塊に分離された事を示している。なお、この過程で、初期にはより低緯度帯に存在していた粒子群が、ハッチ付きの粒子群に取って替わって、北極域に流れ込んで来ている。以後は、流線の場合と同様に同じパターンを保ったまま、西へ流されるだけである。低緯度の粒子群が高緯度のそれにとり替わるという事は、各半球ごとに流体の緯度方向混合が生じた事であり、初期の緯度方向渦位分布が各半球ごとに緯度方向に

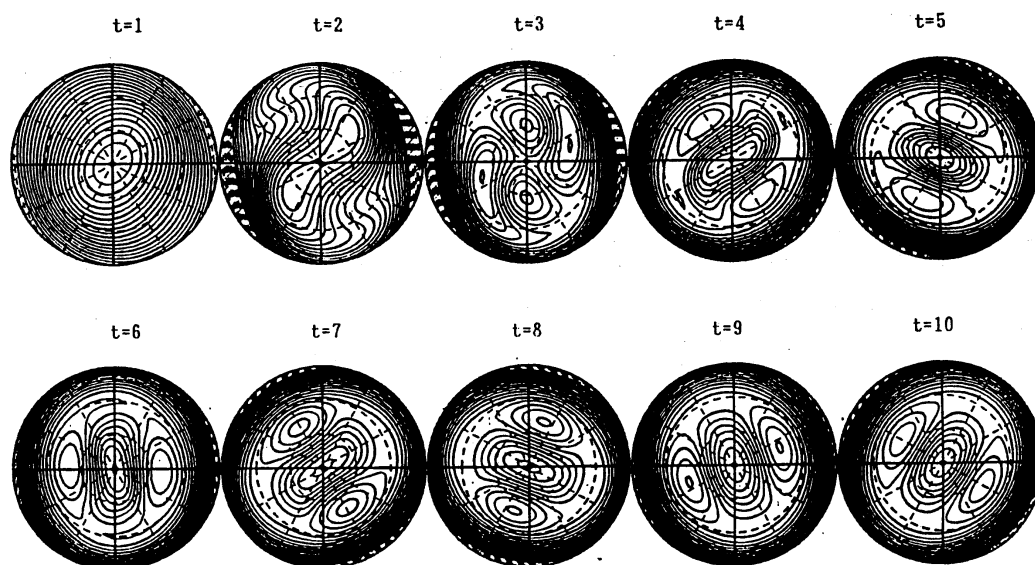


図6 a: 速度場の時間発展

$Ro=1/20$, $A=3$ の場合の速度場の時間発展を流線関数のコンター・マップで示している。北極を中心に赤道を外周上に表す図法を使い、南半球は割愛した。この図に限り、実線のコンターは負の流線関数を表す。

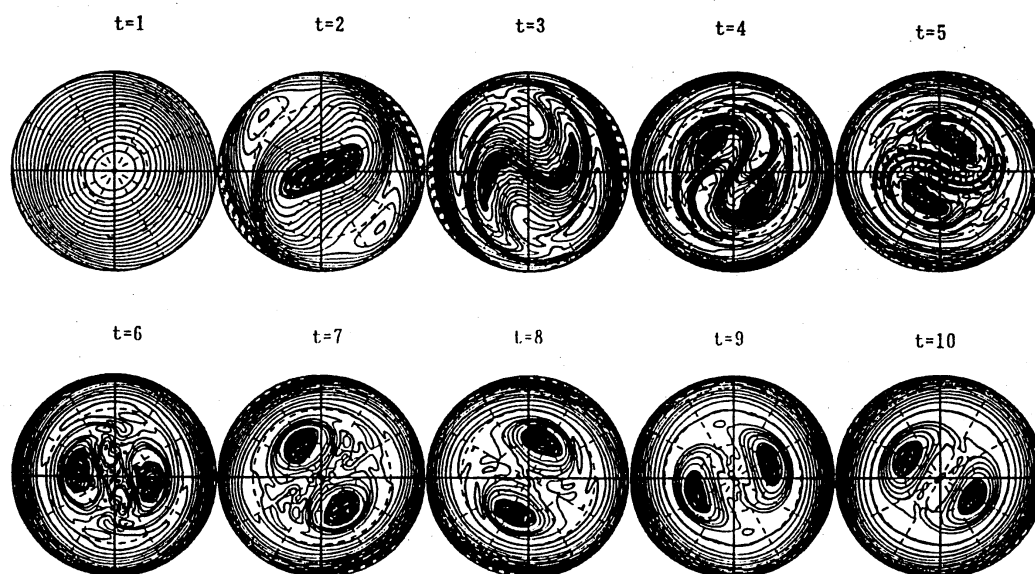


図6 b: 渦位場の時間発展

$Ro=1/20$, $A=3$ の場合の渦位場の時間発展をコンター・マップで示している。ハッチの部分は初期に北緯 65° 以北に存在していた流体粒子群を示す。

ならされ、高緯度でより緩やかに低緯度でより急峻な分布に変化し、それに応じた平均流の加速減速が生じたとも言える。

図7はこの時間発展における、経度平均角運動量の加速・減速であり、初めての極向き波束伝播のステージ ($1 < t < 5$) では、小振幅時とほとんど同じ傾向の加速・減速を生みだしている事がわかる。しかしながら、このステージで、極渦が反転し、「波動-平均流相互作用」がほとんど終了してしまう。 $t=5$ の時刻以降、ひとつの安定な流れのパターンに落ち着いてしまったように見える。

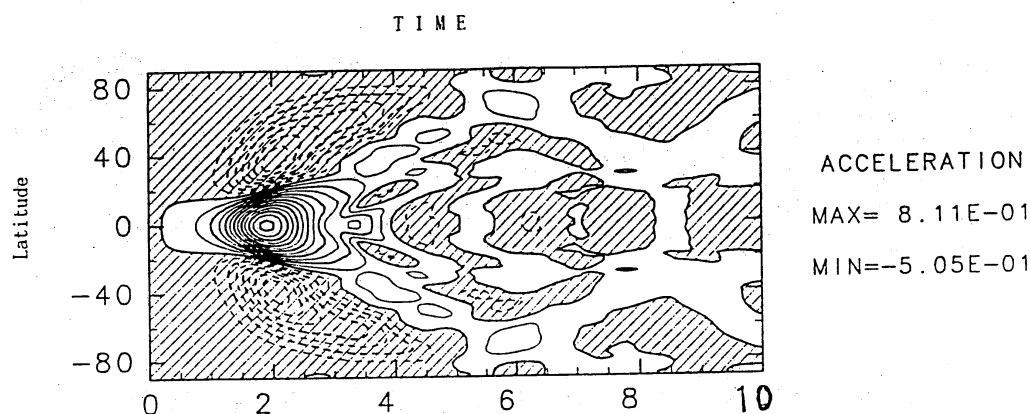


図7: 角運動量の加速・減速
 $Ro=1/20$, $A=3$ の場合の平均角運動量の加速・減速の時系列をコンター・マップで示す。影の部分は負の値を表す。

§ 6 極渦反転の様々なパターン

図8 a, b, c は、各々渦度強制項の東西波数 n を 3, 2, 1 とした場合に、初期の西風極渦の強さを示す Ro と、渦度強制項の強さ A を様々に変化させた場合の $t=10$ における、北半球での流線関数場である。

$n=3$ の場合、いずれの図も東西波数 3 成分が卓越したパターンに落ち着いているが、いずれの図にもメジャーな極渦反転は見られない。 A が大きいほど、波数 3 パターンは顕著になる事と、 Ro が小さくなるほど、正の渦度を持つ流線関数の閉じた 3 個の孤立した目玉パターンの緯度が低くなる傾向がある。後者の特徴は、線形伝播論での反射緯度の傾向と一致する。

$n=2$ の場合、 $Ro=1/20$ の時、 A の値が最も小さくても ($A=3$) メジャーな極渦反転が見られ、次いで、 $Ro=1/40$ の時に、 A の値を十分大きくすると ($A=5$) メジャーな極渦反転が見られる。 $Ro=1/80$ の時は、大きな A でも、さほど大きな反転にはならない。 $Ro=1/10$ では、 A をいくら大きくしても、2 個の目玉状に閉じた流線が目立つだけであり、経度方向平均をすれば、確かに極付近では東風に成っているものの、時計回りの閉じた流線は認められない。

$n=1$ の場合、 $n=2$ の場合と同様に、 $Ro=1/20$ の時に、最も反転が表れ易く ($3 < A$)、次いで $Ro=1/40$ の時には、大きな渦度強制の時には ($5 < A$) メジャーな反転が見られる。 $Ro=1/10$ と $Ro=1/80$ では反転はその領域の面積も強さも大きくはない。また、メジャーな反転の中では、高緯度の波数 0 成分と中緯度の波数 3 成分の共存したパターンが多く見られる。

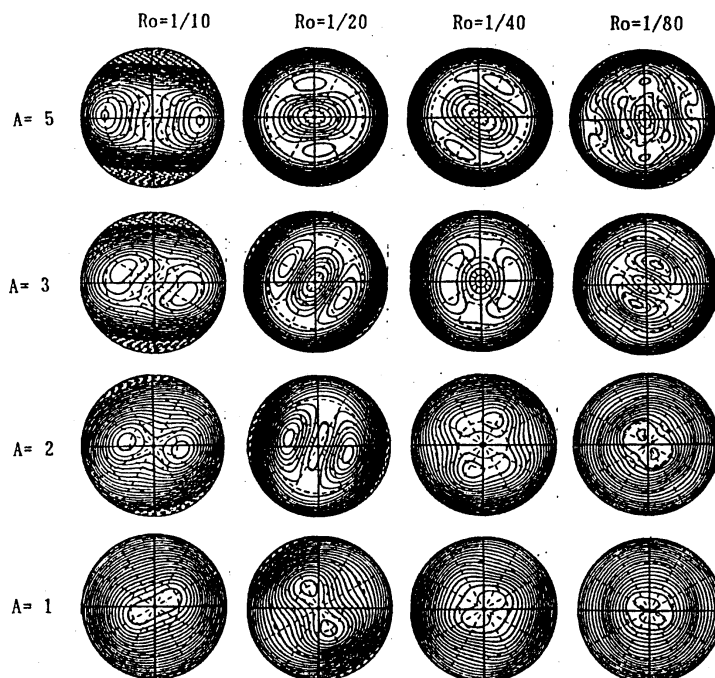
§ 7 おわりに

前節のように極渦反転を分類してみると、メジャーな極渦反転を引き起こすためには、 Ro の値が大きすぎても小さすぎても良くない事がわかる ($Ro=1/20$ と $Ro=1/40$ という値は、緯度 60° において各々 23.1m/s , 11.6m/s の西風となる初期

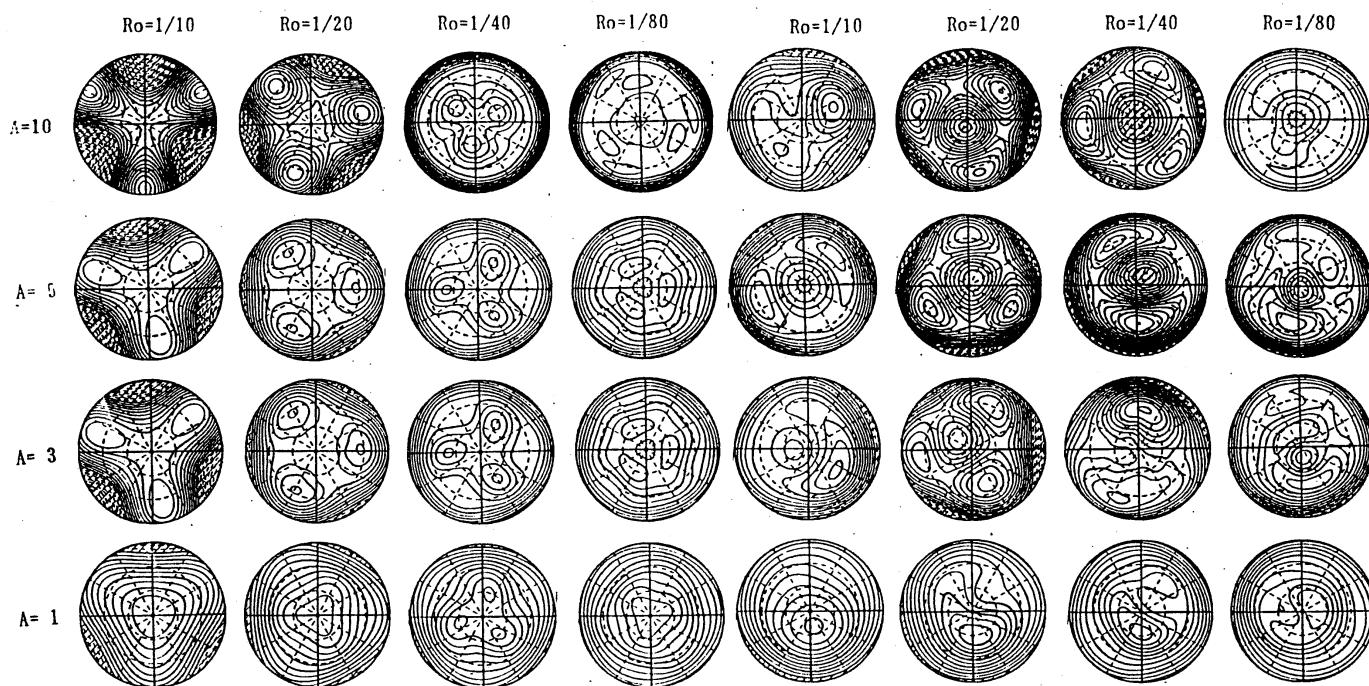
極渦に相当する)。このことは、線形伝播特性から類推すると、反射緯度が低すぎると、波動の影響が高緯度に伝わらないためと考えられるが、反射緯度が高すぎてもいけない理由は解らない。

また、メジャーな反転には、 $n=2$ の場合の、波数 2 成分と共存するタイプと、 $n=1$ の場合の、波数 3 と共存するタイプが見られ、いくつかの安定なパターンというものが存在する事を示唆している。しかし、 $n=3$ の場合には波数 3 のパターンは見られるが、その中心に強い反転が見られないのはなぜだろうか。

これらの疑問に答えるためには、有り得る安定なパターンの洗い出しや、強いロスビー波束の先端部で起こる、流体粒子の混合パターンの分類が必要であると思われる。



(b) $n = 2$ の場合



(a) $n = 3$ の場合

(c) $n = 1$ の場合

図8： 極渦反転の様々なパターン

Ro と A の値の様々な組み合わせの計 64 通りの時間発展に対して、無次元時間 $t=10$ における速度場を流線関数のコンター・マップで表した。(a), (b), (c) は、渦度強制項の東西波数 n が、各々 3, 2, 1 の場合である。この図においても、実線のコンターは負の流線関数を表す。